Nom : Moussa Y Souleymane
Classe : 7C
Ecole : ERRAJA
N° : 1343.

BAC 2014

Exercice 1

1) $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$

$P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)2i - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + \cancel{2i} + 4 - \cancel{2i}$

$\boxed{P(2i) = 0}$

- Pour déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2
* on utilise tableau d'hornaire.

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	X	2i	2i	2i
	1	1	1	0

on a ; a = 1 ; b = 1

$P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Rightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Rightarrow z - 2i = 0 \Rightarrow z = 2i$ ou

$z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4$

$= -3 = (3i)^2 = (i\sqrt{3})^2$

$\delta = i\sqrt{3}$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S\{(2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})\}$.

$Im(2i) \geq Im(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) \geq Im(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})$

$z_0 = 2i$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a) On a $B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Soit $M(x,y)$

$M \in (BC) \Rightarrow \det(\vec{BM}, \vec{BC}) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -\sqrt{3}(x+\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + iy \;/ y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

Or ; $z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

D'où ; $z' = \frac{1}{(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{-y^2+\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow z' = \frac{1}{-y^2+\frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$.

Donc M' est sur l'axe des abscisses.

3) a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$

D'où $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

Exercice 1 (suite)

b) Si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc : $f(z) = \dfrac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathscr{C}(O,1) \setminus \{B, C\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$

et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta}-1\right)^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$$

D'où : $x'^2+y'^2 = (2x'-1)^2$

b)

$\Gamma : x^2+y^2 = (2x-1)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Rightarrow 3x^2-4x-y^2 = -1$

$\Rightarrow 3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}\right]-y^2 = -1$

$\Rightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-y^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$

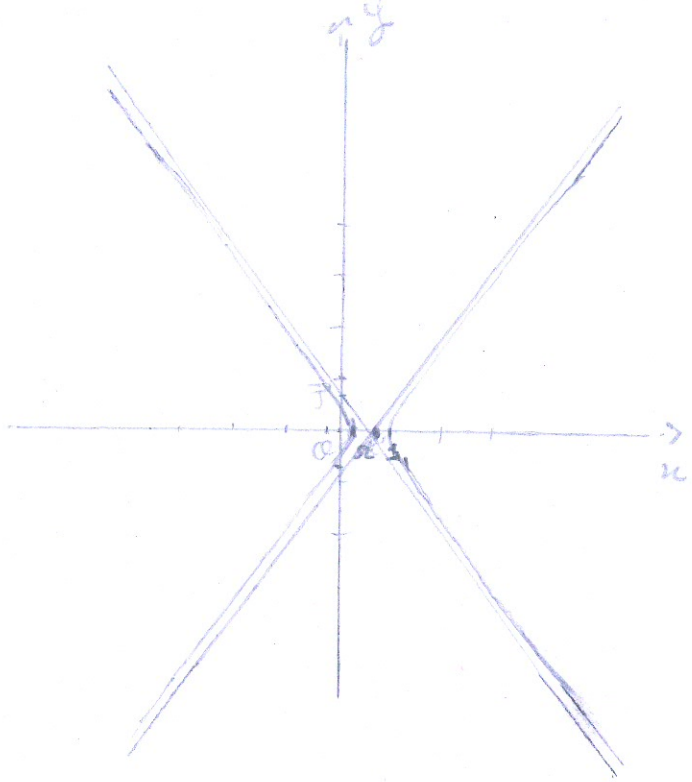
Γ : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc : Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3};0\right)$ et de sommets

$S_1 : \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3};0\right) = (1,0)$ et

$S_2 : \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3};0\right) = \left(\frac{1}{3},0\right)$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ et d'excentricité

$e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \dfrac{2/3}{\frac{1}{3}} = 2$



Exercice 2

1) a) $f(x) = x e^{x}$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{x} = +\infty$

$f'(x) = e^{x} + x e^{x}$

$= e^{x}(1+x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow +\infty$

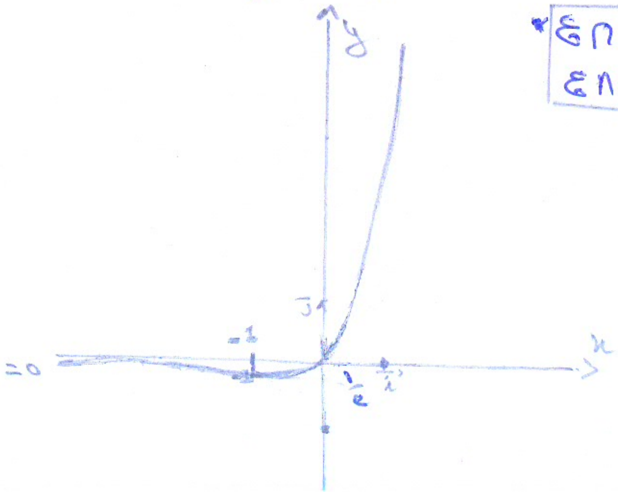
b) * $y = 0$: A.H à (C) au voisinage de $(-\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x e^{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

(C) admet une B.P // $(y'y)$ au voisinage de $+\infty$

* $C \cap (y'y) : (0,0)$

$C \cap (x'x) : (0,0)$



c) $f(x) = x e^{x}$

$f'(x) = (x+1) e^{x}$

$f''(x) = (x+2) e^{x}$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^{x} - 2(x+1)e^{x} + x e^{x}$

$= (x + 2 - 2x - 2 + x) e^{x} = 0$

Donc : f est une solution de l'équation différentielle.

$y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est

$A = \int_0^1 |f(x)| \, dx$

or : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

D'où : $A = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 x e^{x} \, dx$

On pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{x} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{x} \end{cases}$

$A = [x e^{x}]_0^1 - \int_0^1 e^{x} \, dx.$

$= [x e^{x}]_0^1 - [e^{x}]_0^1$

$= [(x-1) e^{x}]_0^1$

$A = 1 \, ua$

2) a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 x e^{x} \, dx$

or : $\int_0^1 x e^{x} \, dx = 1$

D'où $\boxed{I_1 = -1}$

Exercice 2 (Suite)

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$

Donc : $|I_n| = |(-1)^n| \cdot \left|\int_0^1 x^n e^x dx\right|$

$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n e^x dx\right|$

Or : $\forall x \in [0,1]$, $x^n e^x \geq 0$

D'où : $\int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$

Donc : $\left|\int_0^1 x^n e^x dx\right| = \int_0^1 x^n e^x dx$

D'où $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x dx$.

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq x^n e$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \cdot \int_0^1 x^n dx.$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}}$$

Or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'où d'après Le T.G

$\lim_{n\to+\infty} |I_n| = 0$ Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\left[x^{n+1} e^x\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(e - 0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\right)$

$= (-1)^{n+1} \cdot e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} \cdot e - (-1)(-1)^n (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx.$

$$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n \quad \forall n \geq 1}$$

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)e^x}{x+1} dx$

	1	4	-3	-6
-1	X	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$J = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x - 6)(x+1)e^x}{(x+1)} dx$

$= \int_0^1 (x^2 + 3x - 6) e^x dx$

$= \int_0^1 x^2 e^x dx + 3\int_0^1 x e^x dx - 6 \int_0^1 e^x dx.$

$= (-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x dx - 3 \times (-1) \int_0^1 x e^x dx - 6 [e^x]_0^1$

$= I_2 - 3 I_1 - 6(e - 1)$

Or ; $I_1 = -1$ et

$I_2 = (-1)^2 e + 2 I_1 = e - 2$

D'où ; $J = (e - 2) - 3 \times (-1) - 6(e - 1)$

$= e - 2 + 3 - 6e + 6$

$J = 7 - 5e$

Exercice 3

On a : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1, a)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x\ln(x+1) - x\ln x = 0$$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite en 0

b) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) - \ln x$$

$$= 0 + \infty = +\infty .$$

f n'est pas dérivable à droite en 0 est

La courbe de f admet au point

d'abscisse une démi-tangente verticale.

c) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\,\overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}^{\to 0} \quad \text{F.I}$$

On pose $t = \frac{1}{x}$

Alors $\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\ln(1+t)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Donc. $y=1$; AH à C_f au voisinage de $+\infty$

2) a) $\forall x>0 \quad f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1)^2 + x(x+1)}{x(x+1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{-\cancel{x}-1+\cancel{x}}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \forall x>0$$

Donc f' est ↘ sur $]0,+\infty[$

or; $$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

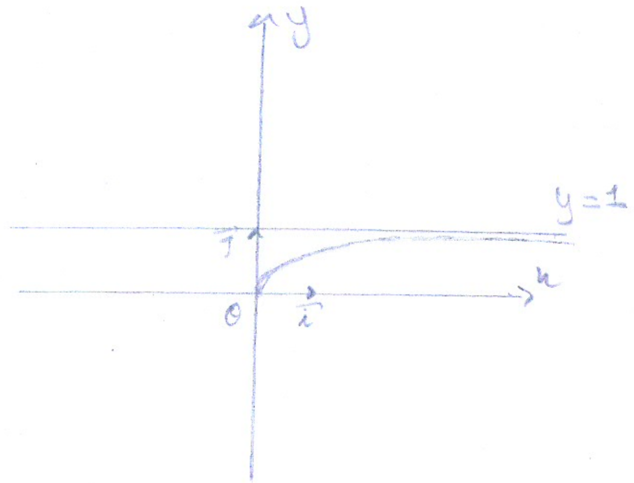
D'où; $\boxed{\forall x>0,\ f'(x) > 0}$

b) T.V de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	+
$f(x)$	0 ↗	1

Exercice 3 (Suite)

c)



3) a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$

Montrons que f_n est continue sur $[0,1]$

sur $]0,1]$, $f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonctions

$x \longrightarrow x^n$ et $x \longrightarrow \ln(1+\frac{1}{x})$

continues sur $]0,1]$ d'où f_n est continue sur $]0,1]$

- Etudions la continuité de f_n à droite en 0

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(1+\frac{1}{x})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(\frac{x+1}{x})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x+1) - x^n \ln x$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = f_n(0)$$

D'où f_n est continue à droite en 0

Donc f_n est continue sur $[0,1]$ et l'integrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette ecriture définie bien une suite numérique.

b) D'après le T.V de la fonction définie dans la question 1 on a

$\forall x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq 1$

D'où en multipliant par x^{n-1}

On a : $\forall x \in [0,1]$

$$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

or : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où ; $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$.

D'où : $0 \leq A_n \leq [\frac{x^n}{n}]_0^1$

Donc : $\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}}$

or ; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où d'après le T.G $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = 0}$

4) a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$$I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$$

$$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\boxed{I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}}$$

Exercice 3 (Suite)

b) $\lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \lim \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}\ln\alpha}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$

$= \lim \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1}(\alpha \ln \alpha) - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$

$= 0 - 0 \times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}}$$

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\, dx$.

On pose, $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

Alors, $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

On obtient $v(x)$ en utilisant une I.P.P

$J_{n+1} = \left[x^{n+1}\left((x+1)\ln(x+1) - x\right) \right]_0^1$

$- (n+1) \int_0^1 x^n \left((x+1)\ln(x+1) - x\right) dx$

$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1) \int_0^1 (x^{n+1} + x^n) \ln(x+1)\, dx$

$+ (n+1) \int_0^1 x^{n+1}\, dx$.

$= 2\ln 2 - (n+1) \int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1) +$

$+ x^n \ln(x+1))\, dx + (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)\left[\int_0^1 x^{n+1}\ln x\, dx + \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx\right]$

$+ (n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1} + J_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$

$J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1) J_{n+1} - (n+1) J_n - \frac{1}{n+2}$

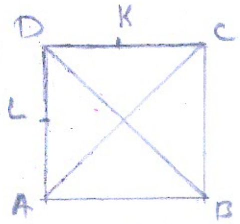
$J_{n+1} + (n+1) J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1) J_n$

$(n+2) J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1) J_n$

$\therefore J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} J_n$

Exercice 4

1)



2) Comme $BL^2 = BA^2 + AL^2$

$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

et $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Donc $BL = AK \neq 0$

D'autre part ; $(\vec{AK}, \vec{BL}) \neq 0 \quad [2\pi]$

Donc il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L.

Et comme $\text{med}[AB] = (OK)$ et $\text{med}[KL] = (BD)$

et $(OK) \cap (BD) = \{O\}$.

Le centre de r est donc le point O

un angle de rotation r est

$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

3, a) Comme $D \neq B$ et $L \neq O$

il existe donc une unique similitude direct f_1 qui transforme D en L et B en O

Le rapport de f_1 est

$\frac{OL}{BO} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4 (Suite)

3: a)

un angle de f_1 est :

$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

b) Comme, $f_1(P) = P$ et $f_1(B) = O$

On a donc $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

or : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{4}\ (\neq 0\ [\pi])$

Donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle OAB c-a-d que P appartient au cercle de Diamètre [AB]

De même ; Comme $f_1(P) = P$ et $f_1(D) = L$

On a : $(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où : $[\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PL}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{4}\ (\neq 0\ [\pi])$

Donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle ODL c-à-d que P appartient au cercle de Diamètre [OD]

On constate que le point O est commun aux cercles de Diamètre [AB] et [OD] mais qu'il n'est pas le centre de f_1 car $f_1(O) = B \neq (O)$

Le point P est donc le second point commun à ces deux cercles (autre que O).

b) Montrons que P est le point d'intersection de (BL) et (AK).

$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) + (\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PL})$

$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DL})\ [\pi]$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

Donc : $\boxed{P \in (BL)}$

De même :

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PK}) = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PO}) + (\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PK})$

$= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DK})\ [\pi]$

$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

Donc : $\boxed{P \in (AK)}$

P est donc le point d'intersection de (BL) et (AK)

4) Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$

un angle de f_2 est $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DL})$

$(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DL}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DL})$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

Et rapport de f_2 est -

$\frac{DL}{BO} = \frac{a/2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont deux similitudes directs de même rapport et de même angle et transforment le point B en un même point L (car $f_2 \circ f_1(B)$

$= f_2(f_1(B)) = f_2(O) = L$ et

$f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$)

Donc : $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$

Le conclure de f_2 est donc celui de f_1.

Exercice 4 (suite)

5, a) $h = f_1 \circ f_2$ est La Composée de deux similitudes directes dont Le produit des rapports est $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ ($\neq 1$) et dont La somme des angles est $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi\ (2\pi)$ et ayant même centre P d'où existe un homothétie de Centre P et de rapport $-\frac{1}{4}$

Or ; $h(L) = f_1 \circ f_2 (B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) =$

D'où $\vec{PL} = -\frac{1}{4}\vec{PB}$

Donc ; $4\vec{PL} + \vec{PB} = \vec{0}$

Donc ; $\boxed{P = bar \begin{vmatrix} B & L \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}$

b) $P = bar \begin{vmatrix} B & L \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow P = bar \begin{vmatrix} B & D & A \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Or ; $B = bar \begin{vmatrix} A & C & D \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

D'où $P = bar \begin{vmatrix} A & C & D & D & A \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow P = bar \begin{vmatrix} A & C & D \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow P = bar \begin{vmatrix} A & K \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

Partie B

1) $r = S_1 \circ S_2$ est Composée de deux reflexions de plans perpendiculaire. est (AD)

D'où ; r est La demi-tour d'axe (AD)

2) $t = S_3 \circ S_4$ est Composée de deux reflexions de plans parallèles

D'où t est une translation de vecteur de t est $2\vec{DA}$

3) $f = r \circ t$ est Composée d'une Translation et d'une rotation. telle que Le vecteur de L'axe de La rotation

D'où ; f est Le visage d'axe (DA) d'angle π et de vecteur $2\vec{DA}$.